

異方性媒質を含む誘電体方形線路における導波モードの変分法による解析

※ ※※ ※※ ※※
大 高 真 人 ・ 下 代 雅 啓 ・ 松 原 正 則 ・ 熊 谷 信 昭

Analysis of the Guided modes in the Dielectric Rectangular
Waveguides with Anisotropic Media Using a Variational Method

Masato OHTAKA, Masahiro GESHIRO, Masanori MATSUHARA, Nobuaki KUMAGAI

(Received June 15, 1977)

The guided modes in the dielectric rectangular waveguides with anisotropic media are investigated by the vector variational method. The dielectric rectangular waveguides have the simplest structure among the dielectric waveguides which have three-dimensional guiding properties. With anisotropic materials the waveguides become to have useful guiding properties to use in integrated optics devices.

In this paper, the propagation constants of the dielectric rectangular waveguides are presented for the following cases; (1) the dielectric tensor $\hat{\epsilon}$ is diagonal, and (2) the tensor has non-diagonal terms (ϵ_{xy} , ϵ_{yx}). For the second case the mode coupling phenomena among the guided modes are discussed showing the detailed figures of the propagation constants and the electro magnetic field distributions.

1. ま え が き

最近の光ファイバーの高性能化によって、光通信の実用化が近づきつつある。この光伝送系の送受端、および、中継点に用いられる素子として、あるいは光情報処理系の構成要素として、光集積回路が注目されている。この光集積回路中の光導波路は、三次元的な導波特性を持つこと、変調器等の構成上異方性媒質を含むことの二つの条件を満たさねばならない。しかし、このような条件を満たす誘電体光線路に関する理論的解析は、その複雑な誘電率分布や境界条件のために、ほとんど行なわれていないのが現状である。

先に、著者らは、三次元的な導波特性を持つもっとも基本的な線路の一つである誘電体

※ 電気工学科 ※※ 大阪大学工学部通信工学科

方形線路（図1）において、コア部のみ、あるいは、基板部のみが異方性媒質よりなる場合、さらに、その両方が異方性媒質よりなる場合について、その導波モードの伝搬定数を変分法を用いて求めた⁽¹⁾。その結果として、異方性媒質を含むスラブ状線路の導波モードにおける場合⁽²⁾と同様に、伝搬定数の上限、あるいは、下限、または、その両者が、線路の持つ誘電率テンソル $\hat{\epsilon}$ に従って、電磁界ベクトルの偏波方向によって異なる場合のあること、誘電率テンソルに非零の非対角成分が存在し、かつ偏波方向の異なる二つの導波モードの伝搬定数が一致する（縮退している）とき、二つの導波モードの間に結合が生じ、異なる伝搬定数を持つ二つの新しい導波モードに変化する（縮退が解ける）こと、等を見出した。

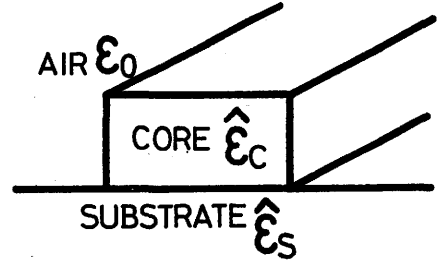


図1. 異方性媒質を含む誘電体方形線路

本報告では、この導波モード間の結合現象に注目し、コア部のみが異方性媒質よりなる場合について、誘電率テンソルが対角成分のみからなるとき、非零の非対角成分 $(\epsilon_{xy}, \epsilon_{yx})$ を含むときのそれぞれに関して数値計算を行い、その結果を用いて導波モード間に結合の起こる機構に関する検討を行う。

2. 変分表現式とRayleigh-Ritz法

本節では、本報告中の数値計算に用いるベクトル変分表現式とRayleigh-Ritz法について簡単に説明する。詳細は文献(1)(3)を参照されたい。

伝送軸方向に一樣な伝送線路の磁界 \mathbf{H} は、時間因子を $\exp(j\omega t)$ 、 h_z 、および、 $h_z \mathbf{i}_z$ を、それぞれ、磁界ベクトルの横断面成分、および、伝送軸方向成分とすると、 z 軸方向の伝搬定数を β として、次式のように与えられる。

$$\mathbf{H} = [h_z(x, y) + h_z(x, y) \mathbf{i}_z] \exp[j(\omega t - \beta z)] \quad (1)$$

ここで、 ω は角周波数、 \mathbf{i}_z は伝送軸方向の単位ベクトルである。

無損失、線形、かつ z 軸方向に一樣な、異方性媒質をも含む線路における伝搬定数 β に関するベクトル変分表現式は次式のように与えられる(4)。

$$\beta^2 = N/D \quad (2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} N = & \int \{ [\mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\mu}^* \mathbf{h}_t^* - \nabla_t \times \hat{\epsilon}^{-1} \nabla_t \times \mathbf{h}_t^*)] \cdot \hat{\epsilon} \cdot [\mathbf{i}_z \times (\omega^2 \hat{\mu} \mathbf{h}_t - \nabla_t \times \hat{\epsilon}^{-1} \nabla_t \times \mathbf{h}_t)] - \omega^2 (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu}^* \mathbf{h}_t^*) \cdot \hat{\mu} \cdot (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \mathbf{h}_t)] ds \\ & - \int [(\nabla_t \times \hat{\epsilon}^{-1} \nabla_t \times \mathbf{h}_t^* - \omega^2 \hat{\mu}^* \mathbf{h}_t^*) \{ \mathbf{i}_z \cdot \hat{\mu}^{-1} (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \mathbf{h}_t) \} + (\nabla_t \times \hat{\epsilon}^{-1} \nabla_t \times \mathbf{h}_t - \omega^2 \hat{\mu} \mathbf{h}_t) \{ \mathbf{i}_z \cdot \hat{\mu}^{-1*} (\mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \hat{\mu}^* \mathbf{h}_t^*) \}] \cdot n d l \\ D = & - \int [(\nabla_t \times \mathbf{h}_t^*) \cdot \hat{\epsilon}^{-1} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}_t) - \omega^2 \mathbf{h}_t^* \cdot \hat{\mu} \cdot \mathbf{h}_t] ds + \int [\mathbf{h}_t \times \hat{\epsilon}^{-1*} (\nabla_t \times \mathbf{h}_t^*) + \mathbf{h}_t^* \times \hat{\epsilon}^{-1} (\nabla_t \times \mathbf{h}_t)] \cdot n d l \end{aligned}$$

面積分は、線路の横断面全体にわたって行い、線積分は、横断面内において $\hat{\epsilon}$ 、あるいは $\hat{\mu}$ が不連続に変化する境界の両側の閉曲線に沿って計算されねばならない。 \mathbf{n} は、不連続境界に垂直な外向き単位ベクトルである。 $\hat{\epsilon}$ 、および、 $\hat{\mu}$ は、それぞれ媒質の誘電率テンソル、および、透磁率テンソルであり、次式のように仮定されている。

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy}^* & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{xy}^* & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\hat{\epsilon}$ 、 $\hat{\mu}$ の各要素は、 x 、および、 y だけの関数である。 $*$ は、複素共役を意味し、 ∇_t は、二次元のHamiltonianであって $\nabla_t = i_x(\partial/\partial x) + i_y(\partial/\partial y)$ である。

試行関数 h_t の満たすべき条件は、媒質の物理定数の不連続境界の両側で、 $\mathbf{n} \times \partial h_t$ および、 $i_z \hat{\mu}^{-1} (i_z \nabla_t \cdot \hat{\mu} \delta h_t)$ が連続であることである。

このような、変分表現式の要求する条件と、解析の対象となる誘電体線路における条件とを共に満たす関数として、無限大領域 $(-\infty, \infty)$ で完備な直交関数系をなす放物柱関数(Parabolic Cylinder Function)を用いることとし、試行関数 h_t を次式のように表わす。

$$h_t = h_x i_x + h_y i_y \quad (4)$$

$$\begin{cases} h_x = \sum_{i,j} A_{xij} \Phi_{ij} \\ h_y = \sum_{i,j} A_{yij} \Phi_{ij} \end{cases}$$

ここで

$$\Phi_{ij} = (2\pi \xi \eta i! j!)^{-1/2} D_i(x/\xi) D_j(y/\eta)$$

$$D_n(z) = (-1)^n \exp\left(\frac{z^2}{4}\right) \frac{\partial^n}{\partial z^n} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

$D_n(z)$ は放物柱関数である。また、 A_{xij} 、 A_{yij} 、 ξ 、 η は定数であって変分法における停留条件によって決定される。

式(4)を式(2)に代入することにより、伝搬定数は次式で与えられることになる。

$$\beta^2 = \frac{\sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{k,l} N_{pqijk} A_{pij} A_{qkl}}{\sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{k,l} D_{pqijk} A_{pij} A_{qkl}} \quad (5)$$

ここで、 p および q は、 x または y を表わすものとする。

A_{qkl} に対する停留条件

$$\partial \beta^2 / \partial A_{qkl} = 0 \quad (6)$$

式(5)に適用すると次式を得る。

$$\sum_p \sum_{i,j} (N_{pqijk} - \beta^2 D_{pqijk}) A_{pij} = 0. \quad (7)$$

式 (7) を解くことにより、 $\beta^2(\xi, \eta)$ および $A_{pij}(\xi, \eta)$ を求めることが出来る。さらに、 ξ および η に関する停留条件

$$\begin{cases} \partial\beta^2(\xi, \eta)/\partial\xi = 0 \\ \partial\beta^2(\xi, \eta)/\partial\eta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

を $\beta^2(\xi, \eta)$ に適用して、結局すべての停留条件を満足する β^2 および h_t を得ることが出来る。

3. 異方性媒質を含む誘電体方形線路の導波モード

本節では、異方性媒質を用いた誘電体方形線路における導波モードの伝搬定数、および、電磁界分布を数値計算によって求め、特に導波モード間の結合現象について詳しく検討を加える。

図2に、異方性媒質をコア部を含む誘電体方形線路の横断面形状、および、誘電率分布を示す。

(x, y, z) は座標軸を、 (α, β, z) は、コア部の光学結晶の結晶軸を表わす。すなわち、図2は、結晶軸と座標軸をすべて一致させた後に $x-y$ 平面内で結晶軸を θ 回転させた状態を表わしている。この場合、

(x, y, z) 座標で表わされた誘電率テンソル $\hat{\epsilon}$ には、 ϵ_{xy} , ϵ_{yx} の二つの非零の非対角成分が存在する。

異方性媒質を含む線路においては、その媒質中の電磁波モードの偏波方向を決める要因は、主としてその媒質の結晶軸であり、これは、等方性媒質のみからなる線路において、偏波方向が線路の境界条件、すなわち、線路の形状のみによって定まることとは大きく異なっている。また、この場合のようにコア部のみに異方性媒質を含むときには、各導波モードの伝搬定数の上限は、その電界ベクトルの方向の誘電率テンソル成分によって規定されて二つに別れ、下限は、 ϵ_3 によって規定される。このために、異なる方向の電磁界ベクトルを持つ二つの導波モードの分散曲線が交わる（縮退する）こととなり、導波モード間の結合の生じる可能性が現われる。

この導波モード間の結合を、 $\theta = 0^\circ$ 、すなわち、結晶軸と座標軸（境界面の方向でもある）とが一致している場合と、非対角成分がもっとも大きな値を持つ $\theta = 45^\circ$ の場合について検討することにしよう。透磁率分布は全領域で μ_0 とする。また、次のように規格化伝搬定数 $\Delta\beta^2$ 、および、規格化周波数 ω_n 、さらに、 U を定める。

$$\Delta\beta^2 = \beta^2 / k_1^2, \quad \omega_n = a / \lambda_1, \quad U = \log_{10} \omega_n \quad (9)$$

ここで、 $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0$ および、 $\lambda_1 = 2\pi / k_1$ である。

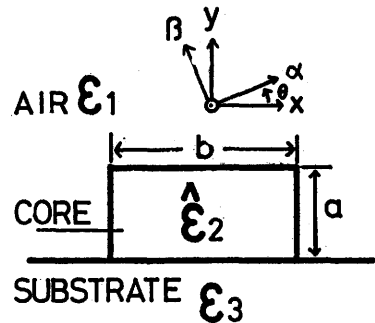


図2. 異方性媒質を含む誘電体方形線路の横断面形状、および、誘電率分布

3・1 誘電率テンソルが主対角成分のみからなる場合

今、誘電率分布を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_0 \\ \epsilon_2 &= \begin{pmatrix} 2.31 & 0 & 0 \\ 0 & 2.19 & 0 \\ 0 & 0 & 2.19 \end{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_3 &= 2.05 \epsilon_1 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 ϵ_1 、 ϵ_2 、および、 ϵ_3 は、それぞれ、空気、ADP ($\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$)、および、螢石の波長 5893\AA における値に近く選ばれており、かつ、ADPのC軸をX軸に一致させた場合に相当する。

図3に、この場合の分散曲線を示す。

図において、各導波モードは、等方性媒質のみからなる場合 (3) と同様に、

$h_p(m, n)$ モードと表わされている。これは、式 (4) において、最大の展開係数 A_{pmn} を持つ導波モードを示している。式 (10) に示す誘電率分布においては、 $\epsilon_{xx} > \epsilon_{yy}$ なので、

$h_y(m, n)$ モードの上限値は2.31であり、 $h_x(m, n)$ モードでは、2.19となっている。

図3においては、 h_y モードと h_x モードの分散曲線のすべての交点（伝搬定数の縮退した点）で、何らの結合も生じていない。 $\theta=0^\circ$ のときには、X (α) 軸方向には、境界条件、誘電率分布共に対称であるため、X (α) 軸方向のモード次数が、偶数次同志、あるいは、奇数次同志の導波モードの組合せ（たとえば、 $h_y(1, 0)$ モードと $h_x(0, 0)$ ）には結合が起らないと考えることが出来る。また、コア部の誘電率テンソルが主対角成分のみからなるとき、各導波モードは、等方性媒質のみからなる誘電体方形線路における場合 (5) と同様に、ごく弱いハイブリッドモードであり、電磁界成分の内、 (E_x, H_y) 成分の大きい h_y モードと、 (E_y, H_x) 成分の大きい h_x モードに区別出来る。このとき、主たる成分に比べて、他の電磁界成分は非常に小さく、このために、偏波方向の異なる h_y モードと h_x モードの伝搬定数^に 極く近い値を持っても、電磁界がほぼ直交条件を満たすために、導波モード間の結合が起らないものと考えられる。

しかし、分散曲線の交点、すなわち、完全に伝搬定数の一致する点を計算することは、数値計算上かなり困難なことから、図3に示した結果から直ちに、 $\theta=0^\circ$ の場合には導波モード間の結合が生じない、と断定してしまうことは出来ないものと思われる。

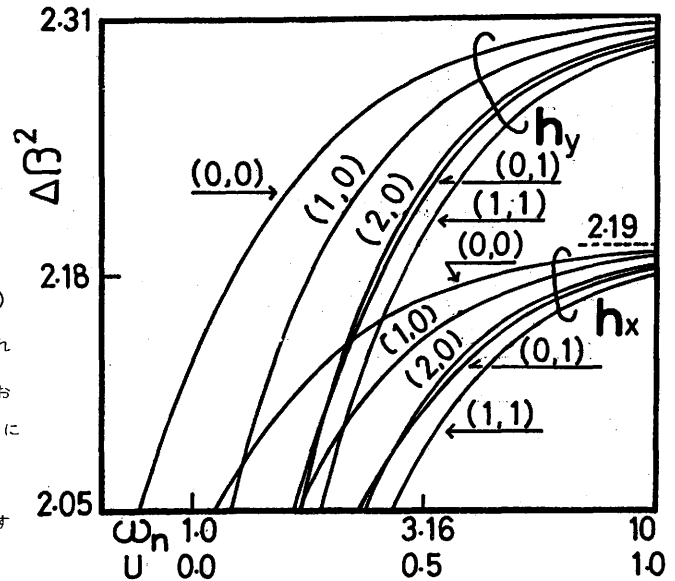


図3. コア部に異方性媒質を含む誘電体方形線路の分散曲線、 $\theta = 0^\circ$ の場合

3. 2 誘電率テンソルが非対角成分をも含む場合

誘電率分布を、次のように仮定する。 231

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_0 \\ \epsilon_2 &= \begin{bmatrix} 2.25 & 0.06 & 0 \\ 0.06 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 2.19 \end{bmatrix} \epsilon_1 \Delta \beta^2 \\ \epsilon_3 &= 2.05 \epsilon_1 \end{aligned} \quad (11)$$

また、 $b=2a$ とする。これは、式 (10) に示す誘電率分布において、コア部の光学結晶の結晶軸を 45° 回転させた場合にあたる。

図 4 に、この場合の分散曲線を示す。

各分散曲線は、カットオフ周波数の低いものから順に、番号をつけて表わされている。これは、導波モード間の結合が生じているために、導波モードを電磁界の節点の数や、式 (4) の A_{pmn} 等によって定めることが出来ないためである。

この場合の導波モードの横断面内の電磁界ベクトルは、導波モード間の結合の影響の小さい領域では、 X あるいは Y 軸の方向ではなく、ほぼ結晶軸、すなわち、図 2 における α あるいは β 軸方向となっていると考えられる。このために通常の (X, Y, Z) 座標をとって考えた場合、これらの導波モードは強いハイブリッドモードとなり、 (E_x, H_y) および (E_y, H_x) 成分は、ほとんど同じ大きさを持つことになる。このとき、異なる偏波方向を持つ導波モードの間でも、接近した伝搬定数を持てば、線路形状が y 軸方向に非対称であることもあいまって、電磁界成分の重なりが大きくなり、直交条件を満足しなくなる。このため、結合度の強弱はあるものの、すべての分散曲線の交点（導波モードが縮退した点）の近傍において導波モード間の結合（縮退の分離）が生ずる。

図 4 において、(a) ~ (d) が導波モード間の結合部分であるが、特に強い結合の生ずる (c) 部分と、三つの導波モード間の結合が同時に生じている (b) 部分 について、次項で電磁界分布を含めて詳しく検討する。

3. 3 導波モード間に結合がある場合の電磁界

図 5 は、図 4 の (c) 部分を拡大したものである。 $\theta=0^\circ$ の場合 (図 3) には交わっていた（縮退していた）二つの導波モードの分散曲線が、導波モード間の結合によって（縮退が）分離し、元来異なる導波モードに属する分散曲線同志がなめらかにつながっている。

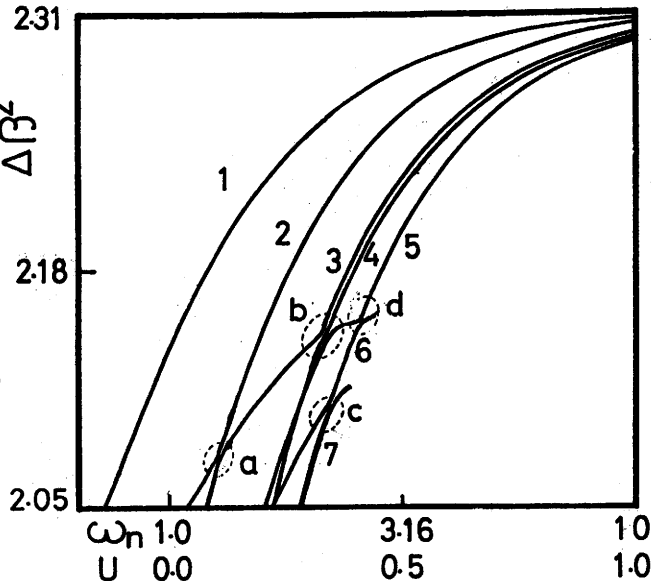


図 4. コア部に異方性媒質を含む誘電体方形線路の分散曲線、 $\theta = 45^\circ$ の場合

図 5. 導波モード間の結合
部分における分散曲
線、図 4 の(0)部分

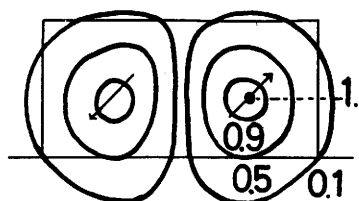
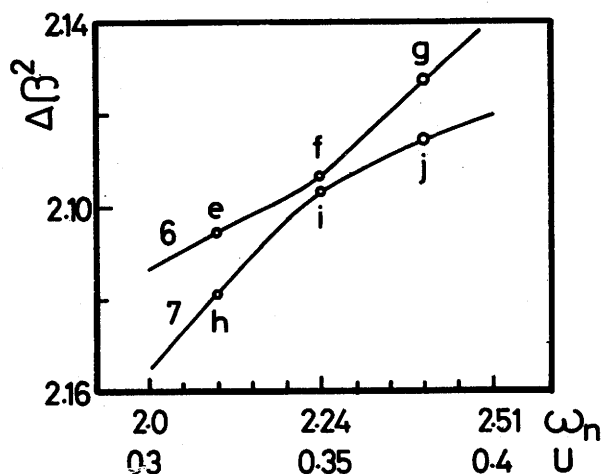


図 6. e 点における $|h_t|$

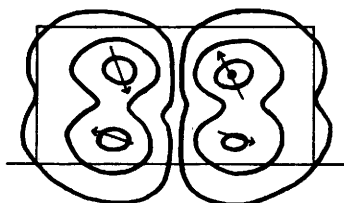


図 7. f 点における $|h_t|$

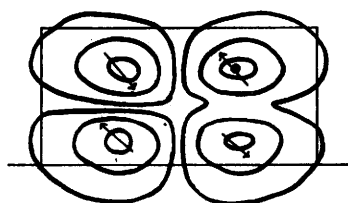


図 8. g 点における $|h_t|$

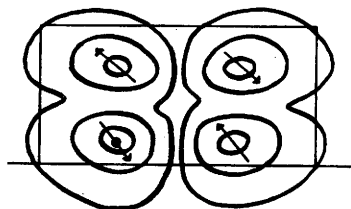


図 9. h 点における $|h_t|$

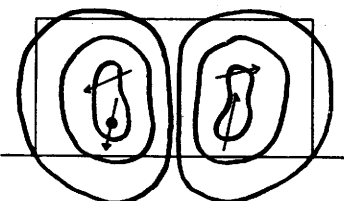


図 10. i 点における $|h_t|$

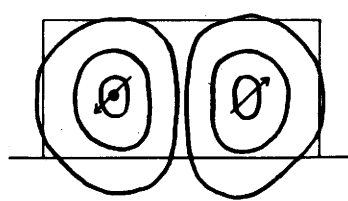


図 11. j 点における $|h_t|$

図 6 ~ 11 に、図 5 に示した e ~ j 点における電磁界ベクトルの横断面成分 $|h_t|$ を示す。図中の矢印は、各導波モードの極大点における磁界ベクトルの向きを示している。

導波モード間の結合の影響の小さい e、g、h、j 点では、ベクトルの偏角は、横断面内で一定であり、e、j 点は、磁界ベクトルが α 軸方向に属し、かつ、 $(1, 0)$ なるモード次数を持つ導波モード $h_\alpha(1, 0)$ であること、また、h、g 点は、 β 軸に属し、 $h_\beta(1, 1)$ なる導波モードであることがわかる。導波モード間の結合の強い f、i 点では、磁界ベクトルの向きは、結晶軸、座標軸のいずれの方向とも異なり、コア中での偏角も一定していない。しかし、この二つの磁界分布には共通点が多い。

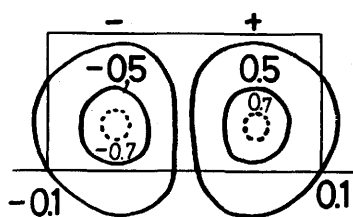
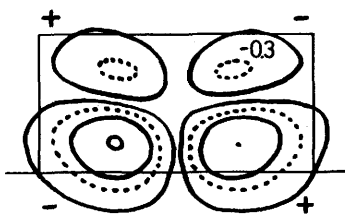
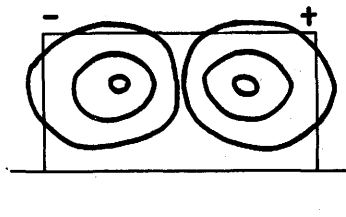
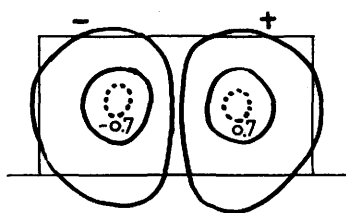
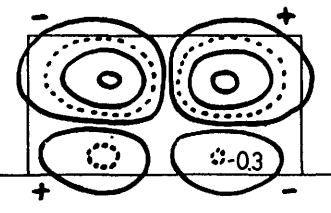
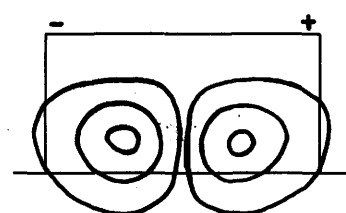
図 12. e 点における h_x 成分図 14. f 点における h_x 成分図 16. i 点における h_x 成分図 13. e 点における h_y 成分図 15. f 点における h_y 成分図 17. i 点における h_y 成分

図 18. 導波モード間の結合
部分における分散曲
線、図 4 の(b) 部分

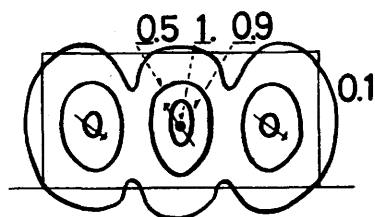
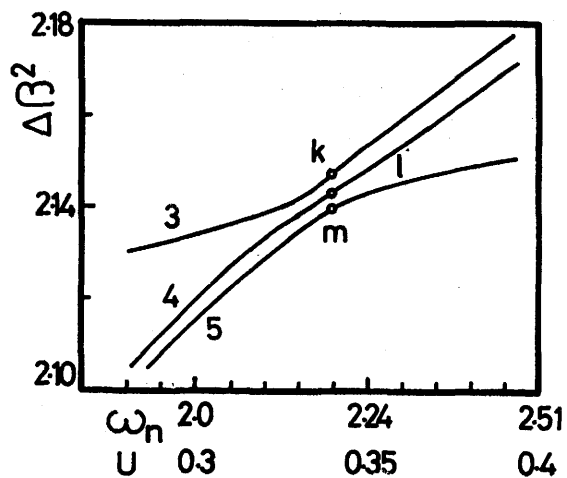
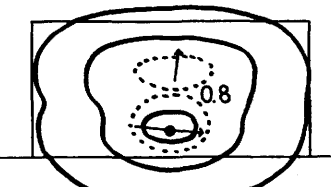
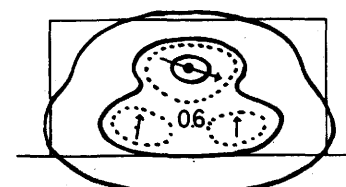
図 19. k 点における $|h_t|$ 図 20. l 点における $|h_t|$ 図 21. m 点における $|h_t|$

図 12～17 は、図 6, 7, 10 の磁界分布の h_x 成分と h_y 成分を示したものである。図 12, 13 は、図 5 の e 点にあたり、導波モード同志の結合の影響のない領域では、 h_x 成分と h_y 成分の界分布がほとんど変わらず、これらのほぼ同じ h_x 成分と h_y 成分の加え合せによって導波モードが構成されていることを示している。図 14～17 においては、 h_x 成分と h_y 成分の界分布は、大きく異なっており、図 6, 11 で示された $h_\alpha(1, 0)$ モードと、図 8, 9 で示された $h_\beta(1, 1)$ モードの加え合せになっていることが、y 軸方向に界分布が反対称であること、および、磁角ベクトルの偏角も反対称であることによって示されている。

これらのことから、図 4 および図 5 に示された 6 次モードと 7 次モードは、 $h_\alpha(1, 0)$ モードと $h_\beta(1, 1)$ モードが $\omega_n = 2.24$ 近傍で導波モード間の結合を起こすことによって出来た導波モードであることがわかる。

図 18 は、図 4 の (b) 部分を拡大したものであり、図 19～21 は、図 18 中の k ~ m 点での磁界の横断面成分 $|h_t|$ を示したものである。この場合には、 $h_\beta(2, 0)$ 、 $h_\beta(0, 1)$ 、および、 $h_\alpha(0, 0)$ の三つの導波モードの加え合せとなっているために、図 7, 10 に比べて、より複雑な界分布となっている。

図 6～17、および、図 19～21 において、x 軸方向に極くわずかな非対称が現われているが、これが、結晶軸に対して線路が非対称となるために起る本来の分布であるのか、あるいは、展開係数の項数の不足による数値計算上の打ち切り誤差によるものであるのかは、現時点では明らかでない。

4. 結 論

異方性媒質を含む誘電体方形線路の導波モードを、ベクトル変分表現式を用いて解析し、特に導波モードの結合現象について詳しく検討した。その結果、誘電率テンソルに非零の非対角成分が存在する場合には各導波モードが強いハイブリッドモードとなっていること、分散曲線の交わる近傍においては導波モード間の結合が生じ、縮退が解けることによって複数の導波モードの加え合せによって新しい導波モードが現われることを、導波モードの分散曲線と電磁界分布を求めることによって明らかにした。

このような現象は、光集積回路においてモード結合器、filter等を構成しようとするとき重要な手段となる。

謝 辞

本研究を行うにあたり、御理解と御援助をいただいた松本 忠 助教授に感謝する。

文 献

- (1) 大高真人、下代雅啓、松原正則、熊谷信昭：“異方性媒質を含む誘電体線路における導波モードの変分法による解析” 電子通信学会技術研究報告, MW 75-59, pp. 63-70. (昭50-09)
- (2) Y.Satomura, M.Matsuhara, and N.Kumagai, "Analysis of electromagnetic-wave modes in anisotropic slab waveguide", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-22, pp. 86-92, Feb. 1974.
- (3) M.Ohtaka, M.Matsuhara, and N.Kumagai, "Analysis of the guided modes in slab-coupled waveguides using a variational method", *IEEE J. Quantum Electron.*, vol.QE-12, pp.378-382. July 1976.
- (4) K.Morishita and N.Kumagai, "Unified approach to the derivation of variational expression for electromagnetic fields", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.MTT-25, pp. 34-40. Jan. 1977.
- (5) J.E.Goell, "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides", *Bell Syst Tech. J.*, vol.48, pp. 2133-2160, Sept. 1969.